MA1 – přednáška 4. 12. 19 (příklady)

Poslední část výkladu o neurčitém integrálu:
„Vhodné" substituce, vedoucí k integraci racionální funkce.

Nejprve označení:

$R(x)$ – racionální funkce proměnné x;

$R(x,y)$ – racionální funkce dvou proměnných, tj.

$$R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$, kde $p(x,y)$ a $q(x,y)$ jsou

polynomy ve dvou proměnných (tzv. „známé" polynomy, kde se vyskytují dvě různé „reálné" proměnné (v mocninách a součtech mocnin)

příklad: $p(x,y) = x^3y - 2xy + y^2 + 1$

$q(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2 + 4$

Pak $p(x, \sqrt{x})$ znamená, že za y v polynomu $p(x,y)$ „dosadíme" $y = \sqrt{x}$.

Dále – ukážeme si některé vhodné substituce ve speciálních „typech" integrálů (zde $R(t)$, $R(t,s)$ jsou racionální funkce jedné, resp. dvou reálných proměnných).

1) $\underline{\int R(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,dx} \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int R(t)\,dt$

(a to už „umíme")

Příklad:

$$\int \frac{\ln x + 3}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t+3}{1-t^2}\,dt =$$

$x \in (0, e^{-1})$, $x \in (e^{-1}, e)$
$x \in (e, +\infty)$

$$= \int \frac{A}{1-t}\,dt + \int \frac{B}{1+t}\,dt =$$

$$= -A \ln|t-1| + B \ln|t+1| + K, \; K \in \mathbb{R}$$

Dopočítejme ještě výpočet koeficientů A, B v rozkladu racionální funkce $\frac{t+3}{1-t^2}$ na parciální zlomky:

$1-t^2 = (1-t)(1+t)$, tedy $\frac{t+3}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$, $t \neq \pm 1$

a odtud máme: $t+3 = A(1+t) + B(1-t)$ (*)

srovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostaneme soustavu rovnic pro A, B:

u t: $A - B = 1$

u t^0: $A + B = 3$

a tedy $A = 2$, $B = 1$.

(Lze též řešit dosazením kořenů jmenovatele do rovnice (*) – – podrobně v minulé přednášce).

a tedy! (návrat $t = \ln x$)

$$\int \frac{\ln x + 3}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = -2\ln|\ln x - 1| + \ln|\ln x + 1| + K,$$

$K \in \mathbb{R}$ (v příslušných intervalech)

2) $$\int R(e^x)\,dx \underset{\text{2VS}}{=} \left|\begin{array}{c} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{array}\right| = \int R(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

(opět integrál z racionální funkce – dále „uvnitř")

<u>Poznámka:</u> „vhodnost" substituce spočívá v tom, že derivace substituce $g'(t)$ ($x = g(t)$) „nekazí" „racionálnost" integrandu (tj. funkce, která je integrována)

<u>Příklad:</u>

$$\underline{\int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx} = \left|\begin{array}{c} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{t\,(t^2+2t+2)}\,dt =$$

(a dále dle „návodu" pro integraci racionální funkce

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int\frac{t+2}{t^2+2t+2}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,dt + \int\frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}\ln(t^2+2t+2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t+1) + K \quad (K\in\mathbb{R} \text{ konstanta}) =$$

$$\underset{(t=e^x)}{=} \underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+2e^x+2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(e^x+1) + K,\ x\in\mathbb{R}}$$

<u>Výpočet koeficientů v rozkladu na parciální zlomky:</u>

$$t\neq 0:\quad \frac{1}{t\,(t^2+2t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+2}, \text{ a tedy } 1 = A(t^2+2t+2) + (Bt+C)\cdot t$$

srovnáním

$$\begin{array}{llll} u\ t^2: & A + B = 0 & \Rightarrow & B = -\frac{1}{2} \\ u\ t: & 2A + C = 0 & & C = -2A = -1 \\ u\ t^0: & 2A = 1 & \Rightarrow & A = +\frac{1}{2} \end{array}$$

3) $\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$; $s \in \mathbb{N}$, $ad - bc \neq 0$, $x \in \mathcal{I}$
($\mathcal{I}$ interval, tedy je funkce spojitá)

Vhodná substituce: $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ $\left(\equiv g^{-1}(x) \text{ v 2VS}\right)$

pak $x = \frac{b - dt^s}{ct^s - a}$ ($\equiv g(t)$ – racionální fce v proměnné t)

a $g'(t)$ je opět racionální fce v t,

a tedy máme

$$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \underset{2VS}{=} \int R\left(\frac{b-dt^s}{ct^s-a}, t\right) \cdot \left(\frac{b-dt^s}{ct^s-a}\right)' dt,$$

což je integrál z funkce racionální (což bylo cílem)

Lépe uvidíme, jak substituce „fungují", na příkladech:

(i) $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{x(x+2\sqrt{x}+2)} dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{3t+1}{t^2(t^2+2t+2)} \cdot 2t\,dt$

$$= \int \frac{2(3t+1)}{t(t^2+2t+2)} dt = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{-t+4}{t^2+2t+2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{t^2+2t+2} dt + 5 \int \frac{1}{(t+1)^2+1} dt =$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{2} \ln(t^2+2t+2) + 5 \operatorname{arctg}(t+1) + C \underset{(t=\sqrt{x})}{=}$$

$$= \ln\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln(x + 2\sqrt{x} + 2) + 5 \operatorname{arctg}(\sqrt{x}+1) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \; x \in (0, +\infty)$$

(ii) $$\underline{\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt[6]{x+1} = t \\ x = t^6 - 1 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt$$

$$= 6 \int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + c = \left(t = \sqrt[6]{x+1} \right)$$

$$= \underline{2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - \ln\left(\sqrt[6]{x+1} + 1\right) + C,}$$

$\underline{x \in (-1, +\infty),\ C \in \mathbb{R}}$

(iii) $$\underline{\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot t \cdot \frac{(-4t)}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$\underline{x \in (-1,0),\ x \in (0,1)}$

$$= \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt = -\int \frac{1}{t-1}\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

(rozklad na parciální zlomky
konstanty určíte snadno)

$$= -\ln|t-1| + \ln|t+1| + 2\,\mathrm{arctg}\,t + c =$$

$$= \underline{-\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1\right| + 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c,}$$

$c \in \mathbb{R}$

což lze upravit (pro $x \in (-1,1)$ je $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$)

$$= \underline{\ln\left|\frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x}}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c}$$

(obvykle ve „výsledcích")

a trochu „lepší" substituce (pro úplnost)

4) $\underline{\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx\,,\ a \neq 0}$, $x \in \mathcal{I}$

a) $a > 0$; $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$ (lze i $\underset{(-)}{\pm}\sqrt{a}\cdot x \underset{(-)}{\pm} t$) :

(t.zv. Eulerova substituce)

pak $\cancel{a}x^2 + bx + c = \cancel{a}x^2 + 2\sqrt{a}\,x + t^2$ a odtud

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t} \quad (\equiv g(t) \text{ ve 2VS}) \text{ a}$$

$g'(t)$ je opět racionální funkce

(substituce „fungují" v intervalech, kde je funkce, kterou integrujeme, definovaná a spojitá)

Příklad: (opět se lépe ukáže)

$$\underline{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx}_{\ x \in R} = \left|\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = -x + t \quad (\Rightarrow 1 + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 2xt + t^2) \\ x = \frac{t^2-1}{2t} \quad \left(= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \\ dx = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt \\ \text{a } \sqrt{1+x^2} = -\frac{t^2-1}{2t} + t = \frac{t^2+1}{2t} \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C =$$

$$= \underline{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C} \quad , C \in R$$

(pro $x \in R$ je $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, tj. i $t = x + \sqrt{1+x^2} > 0$ v „naší" substituci)

b) $\underline{a<0}$, pak $x \in (\alpha_1,\alpha_2)$, kde $\alpha_1<\alpha_2$ jsou reálné kořeny polynomu ax^2+bx+c, a můžeme:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\underset{>0}{(x-\alpha_1)}\underset{<0}{(x-\alpha_2)}} = \sqrt{-a}\,\sqrt{(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)} =$$

$$= \sqrt{-a}\cdot(x-\alpha_1)^2\cdot\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}$$ a pak lze substituovat

(dle „případu" 3)) $\underline{\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}=t}$.

(nebo též pro případ $c>0$ lze užít druhou Eulerovu substituci $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$)

<u>Příklad:</u> (*) $$\underline{\int\frac{x}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx} = \int\frac{x}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\,dx = \left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}=t\\ x=\frac{2-t^2}{1+t^2},\\ dx=\frac{-6t}{(1+t^2)^2}\,dt\end{array}\right|$$
$\underline{x\in(-1,2)}$

$$= \int\frac{2-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{3}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{(-6t)}{(1+t^2)^2} = 2\int\frac{t^2-2}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$= 2\int\frac{t^2+1-3}{(t^2+1)^2}\,dt = 2\left(\int\frac{1}{t^2+1}\,dt - 3\underbrace{\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt}_{(=I_2)}\right) =$$ (vypočtěte I_2 - rekurentní formule)

$$= 2\,\mathrm{arctg}\,t - 6\left(\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t\right)+C =$$

$$= -3\frac{t}{t^2+1} - \mathrm{arctg}\,t + C = \underline{-(1+x)\sqrt{\frac{2-x}{1+x}} - \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}\right)+C},$$
$x\in(-1,2)$, $C\in\mathbb{R}$

<u>Příprava na substituci:</u>

$$\sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{(2-x)(1+x)} = (1+x)\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$$

5) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

a) „snadné" příklady: $\int R(\cos x)\cdot \sin x\,dx \underset{1VS}{=} \left| \cos x = t \right| = -\int R(t)\,dt$

analogicky $\int R(\sin x)\cos x\,dx \underset{1VS}{=} \left| \sin x = t \right| = \int R(t)\,dt$

Příklady: $\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\cdot \sin x\,dx = -\int \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$
$x\in\mathbb{R}$
$= -\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C$

$\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{\sin^6 x}{6}+C,\ x\in\mathbb{R}$

b) obecnější případ – kdy lze „jednoduše" substituovat jako v a)?

v $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, pokud R je „lichá v $\sin x$", tj.
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
lze substituovat $\cos x = t$;

analogicky, je-li $R(\sin x, \cos x)$ „lichá v $\cos x$", tj.
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
lze substituovat $\sin x = t$ (1VS)

Příklad: 1) $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\cdot\sin x\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}(-\sin x)\,dx$
$x\in\mathbb{R}$
$\underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2-1}{2+t}\,dt$ (a dále „unaveně")

nebo 2) $\underline{\int \frac{1}{\cos x}\,dx} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx =$

$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

$\underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) + C = \underline{\frac{1}{2}\left(-\ln|1-\sin x| + \ln|1+\sin x|\right) + C}$

$(C \in \mathbb{R})$.

c) Už jsme „počítali" $\underline{\int R(\operatorname{tg} x)\,dx} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| \underset{2VS}{=}$
$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$= \underline{\int R(t)\frac{1}{1+t^2}\,dt}$

Substituci $\operatorname{tg} x = t$ lze užít jestliže, když platí
$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (říkáme, že $R(\sin x, \cos x)$ je sudá v $\sin x$ a $\cos x$), neboť platí (v intervalech $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$:

$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$)

tedy při substituci $\operatorname{tg} x = t$: $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

a $\sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}$;

při substituci můžeme mít $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pak, je-li (2VS) $t = \operatorname{tg} x$, je $x = \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$; v případných dalších intervalech užijeme periodicitu funkce

Příklad:

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx \underset{2VS}{=} \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t & (= g^{-1}(x)) \\ x = \operatorname{arctg} t & (= g(t)) \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt & \end{array} \right| =$$

$\int$ existuje: $x \in R$

substituce ale „provádíme" jen v $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$!

$$= \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{2+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C \quad , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ;$$

Primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$ ale existuje v R ($f(x)$ je funkce spojitá v R), tak pokud potřebujeme (nebo chceme) primitivní funkci mít v R (nebo zatím pro ukázku v $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$), pak musíme primitivní funkci dodefinovat v bodě $x = \frac{\pi}{2}$ spojitě; tj. označme-li primitivní funkci

$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C_1$ v $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C_2$ v $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, „musí" platit

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} F_1(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} F_2(x) \in R$ a potom tato limita bude funkční hodnotou primitivní funkce v bodě $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} + C_1 \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} + C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2 = C_1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \left(= C_1 + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

(analogicky lze dodefinovat primitivní funkci i v dalších bodech $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$, $k \in N$ — „lepení" primitivní funkce)

d) a na závěr –

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, kde $R(\sin x, \cos x)$ nemá žádnou z „hezkých" vlastností (a), b), c))

„Všude" je rada: substituujte $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $x \in (-\pi, \pi)$, a lze vyjádřit $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ a „vyjde to"!

(Opět – v intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ lze využít periodicity $R(\sin x, \cos x)$ a v bodech $x = (2k+1)\pi$, pokud leží intervalu, kde primitivní funkce existuje, se primitivní funkce dodefinuje opět „lepením" (viz c)))

Vysvětlení „rady": když $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, pak $(x \in (-\pi, \pi))$

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

(viz c))

$$\text{a } \cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

A tedy:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \underset{\text{ZVS}}{=} \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ t \in (-\infty, +\infty) \\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ x \in (-\pi, \pi) \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right|$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

– což je integrál z funkce racionální (což jsme si přáli a „umíme")

<u>Příklad</u>:

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx \underset{2VS}{=} \left|\begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t & ,\ x\in(-\pi,\pi) \\ x = 2\operatorname{arctg} t & ,\ t\in\mathbb{R} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt & \end{array}\right| =$$

existují v $\mathbb{R}$, ale „počítat" budeme v intervalu $(-\pi,\pi)$, pak „slepit"

$$= \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{3+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big) + c \quad v\ (-\pi,\pi),$$

$(= F_0(x)$ – označme$)$

v dalších intervalech $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ lze periodicky „kopírovat" primitivní funkci z intervalu $(-\pi,\pi)$ a v bodech $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ opět „slepit" spojitě (neboť primitivní funkce je v intervalu, tedy existuje, spojitá funkce).

<u>Ukažme zde (např.) „slepení" v bodě $x=\pi$</u>: ($F(x)$ – primitivní fce)

v $(-\pi,\pi)$: $\quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c \quad , c\in\mathbb{R}$

v $x=\pi$: $\quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}+c$

v $(\pi,3\pi)$ $\quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}+c$